A može i ovako...

Ljubica Jerković, Metković

"Tko želi nešto naučiti, naći će način; tko ne želi, naći će izliku", poznata je Picassova izreka no sveprisutnija je jedna druga inačica: "Tko želi nekoga poučiti, naći će način; tko ne želi, naći će izliku". Značajan broj naših učenika smatra matematiku prezahtjevnom i dosadnom pa je poseban izazov zainteresirati upravo takve. Ako se strožoj matematičkoj temi pristupi ležernije i ponudi opcija "a može i ovako...", zasigurno ćemo privoljeti i tipične nematematičare. Kako je ljudska percepcija u svojoj naravi izrazito vizualna, ne iznenađuje potreba da se sve više istražuje i primjenjuje vizualni aspekt ne samo u geometriji, nego i u ostalim područjima matematike. U tom je kontekstu izuzetno važan način na koji našim učenicima prezentiramo određenu temu. Ako to učinimo na zanimljiv, nov i drukčiji način, vrlo je vjerojatno da će se oni aktivnije nastaviti baviti tom temom, unaprijediti mentalne strategije za poboljšanje razumijevanja i pamćenja te biti učinkovitiji.

Kvadratni trinom u kutiji

Naime, linearni član bx (popularno nazvan "srednji član") kvadratnog trinoma

$$ax^2 + bx + c, \quad a,\ b,\ c \in \mathbf{R}\ \ a \neq 0$$

u nekim se slučajevima može prikazati u obliku zbroja dvaju pribrojnika, kako je prikazano:

$$ax^2 + bx + c = \left\{ \begin{array}{c} m \cdot n = a \cdot c \\ m + n = b \end{array} \right\}$$
$$= ax^2 + mx + nx + c$$

pa se dobivena četiri člana grupiraju po dva i izluči se zajednički faktor. Valja još jednom naglasiti da pri tome moraju biti ispunjena dva uvjeta:

1) $m \cdot n = a \cdot c$, 2) $m + n = b$.

Ista faktorizacija može postati preglednija, ležernija i zanimljivija ako se uvede ***Box method of factoring*** ili **faktorizacija metodom kutije** koja podrazumijeva kvadratnu tablicu 2×2 ("kutiju"). Pogledajmo na primjeru kako funkcionira "stari" i "novi" način.

Primjer 1. Prikažite kvadratni trinom:

a) $x^2 - 5x + 6$ b) $6t^2 + 7t + 2$ c) $x^2 - x + 1$

kao umnožak dvaju linearnih faktora.

Ljubica Jerković, profesor savjetnik, Gimnazija Metković, Metković, ljubicajerkovic@gmail.com

Naslovna fotografija preuzeta sa http://ridgelightranch.com/wp-content/uploads/2016/08/Picaso-Cubism-L-Web.jpg

a) Trinom x^2-5x+6 rastavljamo na faktore na dva navedena načina.

- *Rastav srednjeg člana*

U skladu s postavljenim uvjetima tražimo dva broja čiji je umnožak 6 $(a \cdot c = 1 \cdot 6)$, a zbroj -5 $(b = -5)$. Jednostavno se uočava da su to brojevi -3 i -2. Dakle,

$$\begin{aligned} x^2-5x+6 &= x^2-3x-2x+6 \\ &= x\cdot(x-3)-2\cdot(x-3) \\ &= (x-2)\cdot(x-3) \end{aligned}$$

- *Faktorizacija metodom kutije*

Prvi i treći član trinoma postave se u tablicu na glavnu dijagonalu.

x^2	
	6

"Srednji član" prikažemo u obliku zbroja mx i nx (poštujući da je i $m\cdot n = a\cdot c$ i $m+n=b$) te pribrojnike zapišemo na sporednu dijagonalu. Jednostavno se provjeri da je umnožak članova na glavnoj dijagonali jednak umnošku članova na sporednoj te da je zbroj članova na sporednoj jednak "srednjem članu" polaznog trinoma.

x^2	$-3x$
$-2x$	6

Zatim iz svakog retka i stupca kvadratne tablice izlučimo zajednički faktor (poštujući predznak prvog člana u retku i stupcu) i zapišemo ga lijevo, odnosno iznad. Tako iz prvog retka izlučimo x, a iz drugog retka -2, odnosno iz prvog stupca x te iz drugog stupca -3.

	x	-3
x	x^2	$-3x$
-2	$-2x$	6

Dakle, faktori polaznog trinoma su $(x-2)$ i $(x-3)$, tj.

$$x^2-5x+6=(x-2)\cdot(x-3).$$

b) $6t^2+7t+2$

- *Rastav "srednjeg člana"*

U skladu s postavljenim uvjetima tražimo dva broja čiji je umnožak 12 $(a\cdot c = 6\cdot 2)$, a zbroj 7 $(b=7)$. Jednostavno se uočava da su to brojevi 3 i 4. Dakle,

$$\begin{aligned} 6t^2+7t+2 &= 6t^2+3t+4t+2 \\ &= 3t\cdot(2t+1)+2\cdot(2t+1) \\ &= (2t+1)\cdot(3t+2) \end{aligned}$$

- *Faktorizacija metodom kutije*

$6t^2$	
	2

$6t^2$	$3t$
$4t$	2

	$2t$	$+1$
$3t$	$6t^2$	$3t$
$+2$	$4t$	2

c) x^2-x+1

Nije moguće ispuniti uvjete $\left\{\begin{array}{l} m\cdot n = a\cdot c \\ m+n=b \end{array}\right\}$ pa nema rastava ni "kutije".

Nakon uvodnog primjera učenicima se ponude polupopunjene "kutije" kako bi se ideja što bolje razumjela i razradila.

Primjer 2. Dopunite, a potom faktorizirajte:

a) $x^2+5x-24=$

x^2	$8x$
	-24

b) $x^2-7x+10=$

x^2	$-2x$
$-5x$	

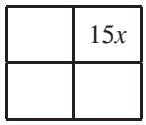
c) $2x^2+x-3=$

$2x^2$	$3x$

d) $3x^2+13x-10=$

	$15x$
	-10

e) $9x^2 + 27x + 20 =$



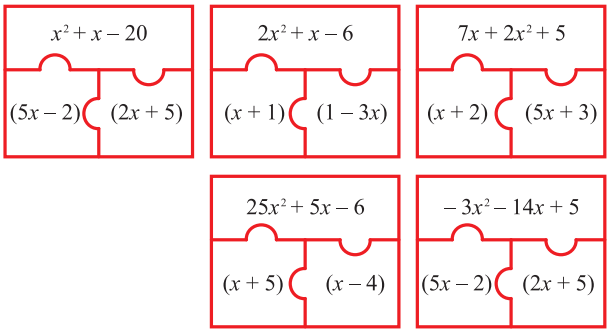
Sada se ponudi zadatak za rad u paru i naglasi da učenici sami izaberu hoće li trinom rastaviti klasično ili s pomoću "kutije". Matematička je pozadina ista, ali oni za kutiju komentiraju: "Fora je" i češće biraju upravo taj način.

Zadatak 1. Faktorizirajte:

a) $x^2 + x - 20 =$ b) $2x^2 + x - 6 =$
c) $7x + 2x^2 + 5 =$ d) $25x^2 + 5x - 6 =$
e) $-3x^2 - 14x + 5 =$

Obvezatno se među zadatcima nađe jedan s "loše posloženim članovima", što jednostavno uoče, ali ih nakratko zbuni zadačić s negativnim vodećim koeficijentom no redovito se netko sjeti i ponosno vikne da se samo izluči minus i opet sve "utrpa u kutiju".

Ako smo spremni malo se poigrati s istim zadatcima, možemo pripremiti puzzle na malo debljem papiru (tanjem kartonu) koje će učenici u paru izrezati i složiti kako treba (ispod kvadratnog trinoma treba biti prikazan odgovarajući rastav), kako je prikazano na slici. Da sve bude napetije i zanimljivije, može se vrijeme za danu aktivnost ograničiti na 20 minuta.



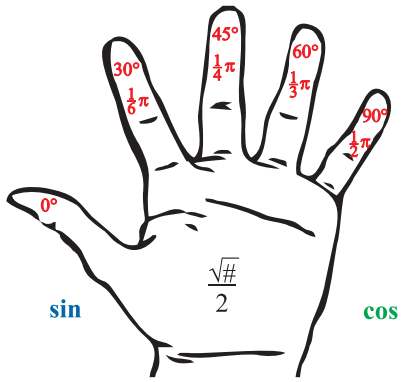
Može se još malo izaći iz okvira...

f)* $12m^4 + 29m^2 + 15 =$

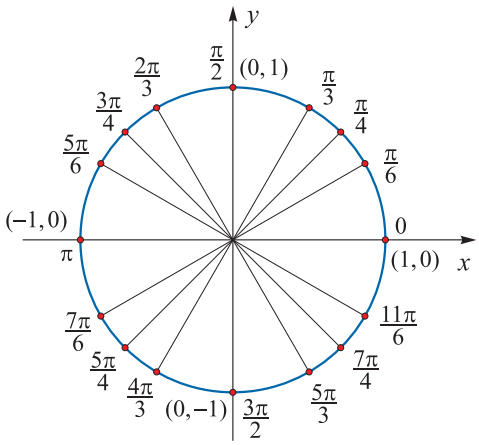
g)* $(y^2 + 5y + 2)(y^2 + 5y + 8) + 8 =$
h)* $(p^2 + p)^2 + 4(p^2 + p) - 12 =$

Metodu kutije uvodim u 1. razredu kada se rade "Algebarski izrazi", točnije "Rastav na faktore". Iako su podijeljena mišljenja oko toga treba li rastav kvadratnog trinoma uopće raditi u 1. razredu ili cijelu priču ostaviti za drugi razred i baviti se njome u sklopu "Kvadratnih jednadžbi", taj dio obvezatno obradim i držim ga korisnim, a nijansiram ovisno o tome radi li se o razredu jezične, opće ili prirodoslovno-matematičke gimnazije.

Jedinična kružnica



Da bi se trigonometrijske funkcije doista razumjele te da bi se bez poteškoća rješavale trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe, izuzetno je važno posvetiti posebnu pozornost jediničnoj kružnici.



Redovito tražim da se kružnica skicira i da se sve iščitava no da ne bi sve ostalo "matematički kruto", imam na umu Einsteinovu izreku: "Sve bi trebalo napraviti što je moguće jednostavnije – no ne i jednostavnije od toga." Dakle, što se tu ima za pojednostavniti? Vrijednosti trigonometrijskih funkcija za neke posebne brojeve, recimo.

Nakon što se u potpunosti razjasni matematička pozadina, opet nudim opciju "a može i ovako...", *Hand trick*.

Dakle, s lijeve strane lijeve ruke imat ćemo vrijednosti sinusa, a s desne strane lijeve ruke vrijednosti kosinusa. Palac predstavlja 0 $(0°)$, kažiprst $\frac{\pi}{6}$ $(30°)$, srednji prst $\frac{\pi}{4}$ $(45°)$, prstenjak $\frac{\pi}{3}$ $(60°)$ te mali prst $\frac{\pi}{2}$ $(90°)$. Na sredini dlana ćemo mijenjati brojnik (korijen iz...), a nazivnik ostaje 2. Ako nas zanimaju vrijednosti sinusa i kosinusa od $\frac{\pi}{6}$ $(30°)$, savit ćemo kažiprst koji predstavlja $\frac{\pi}{6}$ $(30°)$. S lijeve strane savijenog prsta ostao je 1 prst pa broj 1 ide pod korijen, a kako smo rekli da s te strane čitamo vrijednosti sinusa, znači da je

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}.$$

S desne su strane savijenog prsta ostala 3 prsta pa je

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Istom je logikom jasno da je

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

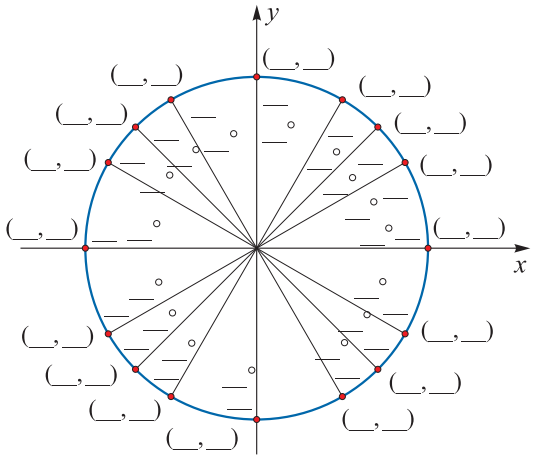
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

i konačno je

$$\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Jasno da se poznavanjem identiteta $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ i $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ vrlo jednostavno "ručno" odrede i vrijednosti tangensa i kotangensa.

Nakon što se još malo ponove predznaci po kvadrantima, samo s pomoću ruke, dopune se vrijednosti na kružnici.



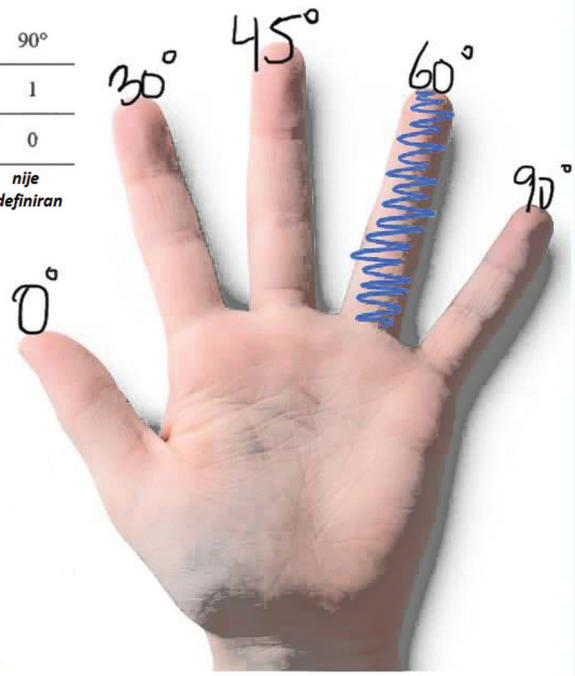
Napominjem da na svojoj ruci tijekom objašnjavanja nacrtam koji prst predstavlja koji kut, no jasno da

ß	0°	30°	45°	60°	90°
sinß	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosß	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tgß	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nije definiran

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$



to učenici kasnije ne rade, upamte to i stvar funkcionira "čistih ruku".

Mogućnošću "a može i ovako..." nove sam informacije dovela u vezu s nečim poznatim na jedan ležerniji način. Ideja je da se asocijativnim putem nove podatke pohrani u dugoročno pamćenje. Ne radi se o mnemotehnici, no mehanizam je vrlo sličan.

Svaki izlazak iz okvira ustaljenih i standardnih načina rješavanja otvara put ka kreativnim mogućnostima koje je zasigurno korisno istražiti.

LITERATURA

1/ www.youtube.com/watć?v=vHq2ikOH50U

2/ https://www.youtube.com/watch?v=1-hrT1Ys390

Proslava nove godine uz novi prost broj

Matematičari su novim otkrićem ušli u novu godinu!

26. procinca 2017. otkriven je novi prost broj, najveći od svih dosad poznatih prostih brojeva. Taj prost broj ima 23 249 425 znamenaka, što je za 910 807 znamenaka više od prethodnog najvećeg poznatog prostog broja. Kad bismo ispisivali taj broj tako da svake sekunde napišemo 5 znamenaka na papir duljine 25.4 mm, nakon 54 dana dobili bismo broj koji se proteže na više od 118 km.

Broj je poznat kao Mersenneov broj M77232917 jer je oblika $2^{77\,232\,917} - 1$.

Dokazati je li neki ogroman broj prost ili ne vrlo je izazovan pothvat, no za ispitivanje Mersenneovih brojeva postoje određene metode ispitivanja koje proizlaze iz njihova posebnog oblika: $M = 2^p - 1$, gdje je p prost broj. Projekt GIMPS (engl. *the Great Internet Prime Search*) – najdugotrajniji masovno distribuirani računalni projekt – pretvorio je te matematičke metode u genijalni softver koji problem ispitivanja broja razlaže na bezbroj malih dijelova. Svaki se djelić ispitivanja odvija na računalu pojedinog dobrovoljnog sudionika projekta, izvršavajući se u pozadini, u dostupnom računalnom vremenu.

Najnoviji broj otkrio je Jonathan Pace iz Georgetowna, Tennessee. Pace je radeći kao sistemski administrator za razne društvene dobrotvorne organizacije tijekom proteklih 14 godina vrijeme svojeg računala i računala koje je administrirao stavljao na raspolaganje projektu GIMPS. Osim sudjelovanja u lovu na velike proste brojeve, softver *Prime95* omogućio je Paceu daljinsko nadziranje računala o kojima se brinuo jer bi mu stizale poruke e-pošte čim bi neko od računala na kojima se softver izvodio prestalo raditi.

Računalu koje je pronašlo novi prost broj trebalo je 6 dana intenzivnog računanja za provjeru je li M77232917 zaista prost broj, a zatim je rezultat provjeravan na nekoliko drugih računala tijekom cijelog sljedećeg tjedna. Pace je nagrađen iznosom od 3000 dolara za otkriće i doprinos u potrazi za prostim brojevima.

U projekt GIMPS i u lov na Mersenneove proste brojeve može se uključiti bilo tko preuzimanjem softvera *Prime95*. Možda biste sljedeći najveći prost broj mogli otkriti baš Vi!